CEVAP ANAHTARI

04.04.2018

Adı ve Soyadı :

Numara:

MAT 104 LİNEER CEBİR II ARASINAVI SORULARI

SORU 1: V ve W aynı F cismi üzerinde iki vektör uzayı ve $A:V\to W$ bir lineer dönüşüm olsun. A lineer dönüşümü birebir ve $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ vektörleri V de lineer bağımsız ise $A(\alpha_1),A(\alpha_2),\ldots,A(\alpha_k)$ da W da lineer bağımsızdır, ispatlayınız.

SORU 2: V ve W birer iç çarpım uzayı ve $\phi:V\to W$ bir lineer dönüşüm olsun.

ϕ bir izometridir $\Leftrightarrow$ $\forall\alpha\in V$ için $\|\phi(\alpha)\|=\|\alpha\|$ dır, ispatlayınız.

SORU 3:

$$\begin{aligned} x+2y-z&=-6\\ 3x-y+2z&=11\\ 2x+5y-4z&=-20 \end{aligned}\ .$$

lineer denklem sistemini elemanter operasyonlar yardımıyla çözünüz.

SORU 4 : $A:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)\to A(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1+x_2,x_3+x_4,x_1-x_3)$$

lineer dönüşümü veriliyor.

a) $\mathbb{R}^4$'ün standart bazı S ve $\mathbb{R}^3$' ün bazı $T=\{(1,1,0),(0,1,1),(0,0,1)\}$ verilsin. S ve T bazlarına göre A lineer dönüşümüne karşılık gelen matrisi bulunuz.

b) $\textit{Çek}A$ yı, bazını ve boyutunu bulunuz.

SORU 5: $A=\begin{bmatrix}1&3&-2\\2&8&-3\\1&7&1\end{bmatrix}$ matrisinin tersini elemanter operasyonlar yardımıyla bulunuz.

Prof. Dr. İsmail AYDEMİR

Not: Sorular eşit puanlı ve süre 90 dakikadır.

CEVAPLAR

1- $\sum_{i=1}^{k} c_i A(\alpha_i) = 0$ lineer bağıntısını ele aldım. A lineer olduğundan

$$\sum_{i=1}^{k} c_i A(\alpha_i) = A\left(\sum_{i=1}^{k} c_i \alpha_i\right) = 0$$ yazılır. Hipoteze göre

A birebir olduğu için

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \alpha_i = 0$$

olacak şekilde yazılabileceği biliniyor. Yine, α_i'ler lineer bağımsız olduğundan $\forall i$ için $c_i = 0$ olur. Bunun anlamı $A(\alpha_1), A(\alpha_2), \ldots A(\alpha_k)$ lar da lineer bağımsızdır.

2- $(\Rightarrow)$ ϕ bir izometri olsun. O zaman $\forall \alpha \in V$ için

$$\|\alpha\|^2 = \langle \alpha, \alpha \rangle = \langle \phi(\alpha), \phi(\alpha) \rangle = \|\phi(\alpha)\|^2$$

ve buradan

$$\|\alpha\| - \|\phi(\alpha)\|$$

olur.

$(\Leftarrow)$ ϕ normu korusun, yani $\forall \alpha$ için $\|\phi(\alpha)\| = \|\alpha\|$ olsun.

Herhangi $\alpha, \beta \in V$ için

$$\langle \phi(\alpha+\beta), \phi(\alpha+\beta) \rangle = \langle \alpha+\beta, \alpha+\beta \rangle$$

olur. Böylece sağ ve sol tarafı açarsak

$$\langle \phi(\alpha), \phi(\alpha) \rangle + \langle \phi(\alpha), \phi(\beta) \rangle + \langle \phi(\beta), \phi(\alpha) \rangle + \langle \phi(\beta), \phi(\beta) \rangle$$

$$= \langle \alpha, \alpha \rangle + \langle \alpha, \beta \rangle + \langle \beta, \alpha \rangle + \langle \beta, \beta \rangle$$

olur. Diğer taraftan,

$$\langle \phi(\alpha), \phi(\alpha) \rangle = \langle \alpha, \alpha \rangle \text{ ve } \langle \phi(\beta), \phi(\beta) \rangle = \langle \beta, \beta \rangle$$

olduğundan

$$\Rightarrow \langle \phi(\alpha), \phi(\beta) \rangle + \langle \phi(\beta), \phi(\alpha) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle + \langle \beta, \alpha \rangle$$

ve buradan

$$\underbrace{\langle \phi(\alpha), \phi(\beta) \rangle + \overline{\langle \phi(\alpha), \phi(\beta) \rangle}}_{= 2\,\mathrm{Re}\{\langle \phi(\alpha), \phi(\beta) \rangle\}} = \underbrace{\langle \alpha, \beta \rangle + \overline{\langle \alpha, \beta \rangle}}_{= 2\,\mathrm{Re}\{\langle \alpha, \beta \rangle\}}$$

olur. Bu son ifade de β yerine $i\beta$ yazarsak

$$\mathrm{Im}\{\langle \phi(\alpha), \phi(\beta) \rangle\} = \mathrm{Im}\{\langle \alpha, \beta \rangle\}$$

elde edilir. Böylece reel ve kompleks kısımlar kendi aralarında esit olduklarından bu iki değer esittir, yani

$$\langle \phi(\alpha), \phi(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$$

dır. Bu son esitlik de ϕ nin bir izometri olduğunu ifade eder.

3.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -6 \\ 3 & -1 & 2 & 11 \\ 2 & 5 & -4 & -20 \end{array}\right] \underset{\mathcal{E}_2}{\overset{\mathcal{E}_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -6 \\ 0 & -7 & 5 & 29 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \end{array}\right]$$

$$\overset{\mathcal{E}_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & -7 & 5 & 29 \end{array}\right] \underset{\mathcal{E}_5}{\overset{\mathcal{E}_4}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & -9 & -27 \end{array}\right]$$

$\mathcal{E}_1 : S_2 \to S_2 - 3S_1$

$\mathcal{E}_2 : S_3 \to S_3 - 2S_1$

$\mathcal{E}_3 : S_2 \longleftrightarrow S_3$

$\mathcal{E}_4 : S_1 \to S_1 - 2S_2$

$\mathcal{E}_5 : S_3 \to S_3 + 7S_2$

$$\downarrow$$

$x + 3z = 10$

$y - 2z = -8$

$-9z = -27 \Rightarrow \boxed{z = 3}$

$\Rightarrow x + 3.3 = 10 \Rightarrow \boxed{x = 1}$

$y - 2.3 = -8 \Rightarrow \boxed{y = -2}$

4- (a) $S = \{ e_1 = (1,0,0,0),\ e_2 = (0,1,0,0),\ e_3 = (0,0,1,0),\ e_4 = (0,0,0,1) \}$

ve $T = \{ \alpha_1 = (1,1,0),\ \alpha_2 = (0,1,1)\ \alpha_3 = (0,0,1) \}$ olmak üzere

- $A(e_1) = A(1,0,0,0) = (1+0,\ 0+0,\ 1-0) = (1,0,1)$

  $\Rightarrow A(e_1) = (1,0,1) = 1(1,1,0) - 1(0,1,1) + 2(0,0,1)$

- $A(e_2) = A(0,1,0,0) = (0+1,\ 0+0,\ 0-0) = (1,0,0)$

  $\Rightarrow A(e_2) = (1,0,0) = 1(1,1,0) - 1(0,1,1) + 1(0,0,1)$

- $A(e_3) = A(0,0,1,0) = (0+0,\ 1+0,\ 0-1) = (0,1,-1)$

  $\Rightarrow A(e_3) = (0,1,-1) = 0(1,1,0) + 1(0,1,1) - 2(0,0,1)$

- $A(e_4) = A(0,0,0,1) = (0+0,\ 0+1,\ 0-0) = (0,1,0)$

  $\Rightarrow A(e_4) = (0,1,0) = 0(1,1,0) + 1(0,1,1) - 1(0,0,1)$

$$\begin{cases} A(e_1) = 1 \cdot \alpha_1 - 1\alpha_2 + 2\alpha_3 \\ A(e_2) = 1\,\alpha_1 - 1\,\alpha_2 + 1\,\alpha_3 \\ A(e_3) = 0\,\alpha_1 + 1\,\alpha_2 - 2\,\alpha_3 \\ A(e_4) = 0\,\alpha_1 + 1\,\alpha_2 - 1\,\alpha_3 \end{cases}$$

A lineer dönüşümüne karşılık gelen matris $\mathcal{A}$ olmak üzere

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{4\times 3}^{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 4}$$

(b) $\text{çek}A = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid A(x) = 0 \right\}$ dır.

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2,\ x_3 + x_4,\ x_1 - x_3) = (0,0,0,0)$$

$$\Rightarrow \quad x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2$$

$$x_3 + x_4 = 0 \Rightarrow x_3 = -x_4$$

$$x_1 - x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_3 \text{ olmak üzere}$$

$x_1 = \lambda$ dersek $\quad x_2 = -\lambda, \quad x_3 = \lambda, \quad x_4 = -\lambda$ olur. Buradan

$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (\lambda, -\lambda, \lambda, -\lambda) = \lambda(1,-1,1,-1), \ \lambda \in \mathbb{R}$$

yazılır ki

$$\text{çek}A = \left\{ \lambda(1,-1,1,-1) : \lambda \in \mathbb{R} \right\} \text{ elde edilir.}$$

boy çekA = 1 ve çekA nın bir baze $(1,-1,1,-1)$

$$\Rightarrow \text{çek}A = S_p\left\{ (1,-1,1,-1) \right\} \text{ bulunur.}$$

5- $[A : I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$$\underset{E_2}{\overset{E_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} E_1 : S_2 \to S_2 - 2S_1 \\ E_2 : S_3 \to S_3 - S_1 \end{array}$$

$$\overset{E_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad E_3 : S_2 \to \frac{1}{2} S_2$$

$$\underset{E_5}{\overset{E_4}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7/2 & 4 & -3/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} E_4 : S_1 \to S_1 - 3S_2 \\ E_5 : S_3 \to S_3 - 4S_2 \end{array}$$

$$\underset{E_7}{\overset{E_6}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 29/2 & -17/2 & 7/2 \\ 0 & 1 & 0 & -5/2 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} E_6 : S_2 \to S_2 - \frac{1}{2} S_3 \\ E_7 : S_1 \to S_1 + \frac{7}{2} S_3 \end{array}$$

$= [I_3 : A^{-1}]$ dur. Buradan

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 29/2 & -17/2 & 7/2 \\ -5/2 & 3/2 & -1/2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$ bulunur.